有限射影平面について (有限群論とその周辺)

数理解析研究所講究録
424巻 1981年 37-52

有限射影平面について

大阪大学教養部　　平峰　豊

位数nの有限射影平面は，n個の文字の集合Rと記号∞を用いてある種の"座標化"ができて，これによりRに三項演算$T=T(a,b,c)$　$(a,b,c\in R)$　が導入され(R,T)は，planar ternary ring（略してPTR）と呼ばれる構造をもつ集合となる。逆にPTRを与えると射影平面が自然な方法で構成できるので，位数nの射影平面を考えることと位数nのPTRを考えることは同等の意味をもつ。

(R,T)をPTRとする。特別な元$0,1\in R$を用いて，

$$a+b=T(1,a,b) \qquad a\cdot b=T(a,b,0)$$

と定めることによりRは二種の二項演算$\{+,\cdot\}$を持つ集合と捉えることができる。これも同じ記号(R,T)で表わす。(R,T)は射影平面Πの代数的構造と呼ばれているが，これに対して射影平面Πの自己同型群を一般にΠの幾何的構造という。これら二種の構造は互いに他の性質を強く制限している

ことが知られている。

ここでは，(R,T) が *semi-field* と呼ばれる場合についてのべることを目的とする。(§4〜§6)　そのために必要ないくつかの定義や射影平面の一般的性質を§1〜§3で，[4] の第3章から第8章の方法に従ってのべる。集合はすべて有限とする。従って，考える射影平面はすべて有限射影平面である。

§1. 有限射影平面とその自己同型群

二種の集合 $\mathfrak{P}=\{P,Q,\cdots\}$，$\mathfrak{L}=\{l,m,\cdots\}$ と直積集合 $\mathfrak{P}\times\mathfrak{L}$ の部分集合 I の組 $\Pi=(\mathfrak{P},\mathfrak{L},I)$ を考える。$P\in\mathfrak{P}$ と $l\in\mathfrak{L}$ に対して $(P,l)\in I$ のときに PIl または lIP と表わす。I を incidence relation という。

定義　$\Pi=(\mathfrak{P},\mathfrak{L},I)$ が射影平面であるとは次の(1)(2)(3)が満たされることをいう。

(1) 異なる二元 $P,Q\in\mathfrak{P}$ に対して $l\in\mathfrak{L}$ が唯一つ定まって，PIl，QIl が成りたつ。($l=PQ$ と表わす)

(2) 異なる二元 $l,m\in\mathfrak{L}$ に対して $P\in\mathfrak{P}$ が唯一つ定まって，lIP，mIP が成りたつ。($P=l\cap m$ と表わす)

(3) $\mathfrak{P}$ の部分集合 $\mathfrak{A}$ が存在して $|\mathfrak{A}|=4$ かつ $\mathfrak{A}$ の異なる二元 A,B に対して $\{P\in\mathfrak{P}\mid PIAB\}\cap\mathfrak{A}=\{A,B\}$ が成り立つ

$\mathfrak{P}$の元を"点"．$\mathfrak{L}$の元を"直線"とよび．(3)をみたす$\mathfrak{Q}$を四角形と言う。また．点P_0に対して$[P_0]=\{l\in\mathfrak{L}\mid l\,I\,P_0\}$．直線$l_0$に対して$[l_0]=\{P\in\mathfrak{P}\mid P\,I\,l_0\}$とおく。$[l_0]$は直線$l_0$と同一視して単に$l_0$と表わすことが多い。

任意の有限射影平面$\pi=(\mathfrak{P},\mathfrak{L},I)$に対して$n\geqq 2$が定まり．次を満たすことが定義より容易に分かる。

(i) $|[P]|=|[l]|=n+1 \quad \forall P\in\mathfrak{P},\ \forall l\in\mathfrak{L}$

(ii) $|\mathfrak{P}|=|\mathfrak{L}|=n^2+n+1$

このnをπのorderという。

$\pi_1=(\mathfrak{P}_1,\mathfrak{L}_1,I_1)$，$\pi_2=(\mathfrak{P}_2,\mathfrak{L}_2,I_2)$を射影平面とする。$\pi_1$から$\pi_2$への写像$x$が同型写像であるとは次の(i)(ii)が満たされることをいう: (i) $\mathfrak{P}_1^x=\mathfrak{P}_2$，$\mathfrak{L}_1^x=\mathfrak{L}_2$ (ii) $P,l\in\pi_1$に対して $P\,I\,l \rightleftarrows P^x\,I\,l^x$

とくに$\pi_1=\pi_2$ ($\equiv\pi$とおく)のときxを射影平面πのcollineationといい．その全体が作る群をAut(π)と表わす。Aut(π)の部分群Gをπのcollineation groupという。collineation xに対して．xが固定する点と直線の全体を$F(x)$と表わす。

xが点Pと直線lに対して(P,l)-perspectivityであるとは$F(x)\supseteqq\{P\}\cup\{l\}\cup[P]\cup[l]$が成りたつことをいう。このとき点$P$を$x$のcenter，直線$l$を$x$のaxisという。$x\neq 1$ならば上では等号が成りたつことが容易に分かる。またGに

含まれる (P,ℓ)-perspectivity の全体を $G(P,\ell)$ と表わす。これは明らかに G の部分群となる。

"perspectivity" という概念はきわめて重要なものであるがそれを示す事実の一つに次の定理がある。

<u>Baer の定理</u>　Π を order n の射影平面、t をその位数 2 の collineation とすると、次のいずれかが起る。

(i) n は平方数で $F(t)$ は（Π と同じ incidence relation で）order $\sqrt{n}$ の射影平面である。（Π の <u>Baer subplane</u> と呼ばれる）

(ii) 点 P と直線 ℓ が存在して、t は (P,ℓ)-perspectivity である。

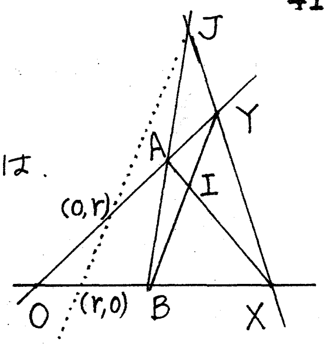
<u>射影平面の例</u>　$V=V(3,GF(q))$ とし、V の一次元部分空間の全体を $\mathfrak{P}$，二次元部分空間の全体を $\mathfrak{L}$，incidence relation I として通常の包含関係をとると $\Pi=\Pi(\mathfrak{P},\mathfrak{L},I)$ は order q の有限射影平面となる。これを Desarguesian といい $\Pi=PG(2,q)$ と表わす。どんな Desarguesian とも同型にならない有限射影平面を non-Desarguesian という。

§2. <u>有限射影平面とその座標化</u>

Π を order n の射影平面とし、$\{O,I,X,Y\}$ をある四角形とする。$R=\{0,1,a,b,\cdots\}$ を n 個の文字の集合とすると、射影平面 Π は R を用いて以下にのべるように座標化される。（詳細は [4] の第5章参照）

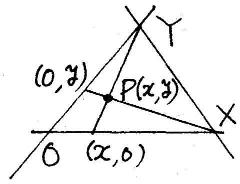
(i) $O=(0,0)$　$OY \cap IX \equiv A=(0,1)$

(ii) $OY-\{O,Y,A\}$ に属する $n-2$ 点に対しては、$R-\{0,1\}$ の $n-2$ 文字を用いて $(0,r)$ のように適当な順序で対応させる。

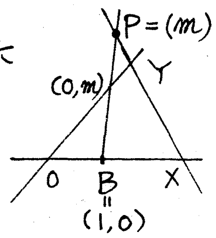


(iii) $OX \cap IY \equiv B$, $BA \cap XY \equiv J$ とおくとき、$OX-\{X\}$ の任意の点 P に対して $JP \cap OY=(0,r)$ の時に $P=(r,0)$ と定める。

(iv) 点 $P \in \Pi - OX \cup OY \cup XY$ に対しては、$XP \cap OY=(0,y)$ $YP \cap OX=(x,0)$ のとき $P=(x,y)$ と定める。

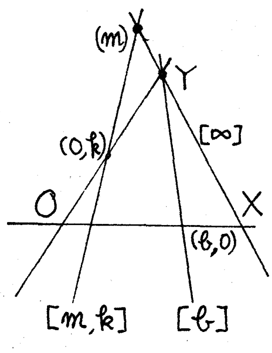


(v) $XY-\{Y\}$ の点 P に対しては、$PB \cap OY=(0,m)$ のとき $P=(m)$ と定める。また $Y=(\infty)$ とする。



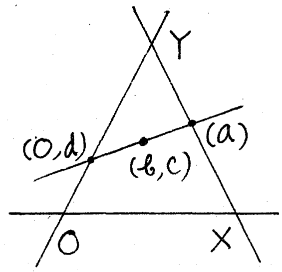
(i)′ Y を通らない直線 l に対しては、$l \cap XY=(m)$, $l \cap OY=(0,k)$ のとき $l=[m,k]$ と定める。

(ii)′ Y を通る直線 l $(\neq XY)$ に対しては $l \cap OX=(b,0)$ の時に $l=[b]$ と定める。また $XY=[\infty]$ とする



この座標化された射影平面を用いて、集合 R に三項演算 T が次のように定義される。

$T(a,b,c)=d \underset{定義}{\Longleftrightarrow}$ (a) と (b,c) を結ぶ直線と OY との交点が $(0,d)$



(R,T) を planar ternary ring (PTR) という。三項演算により R に和と積が導入される。

$$a+b=T(1,a,b) \qquad a,b\in R$$
$$a\cdot b=T(a,b,0) \qquad a,b\in R$$

<u>定義</u>　$(R,\{+,\cdot\})$ を四角形 $\{O,I,X,Y\}$ により定まる PTR という。

たとえば，§1 で定義した order q の Desarguesian の場合は $(R,\{+,\cdot\})\cong GF(q)$ となることが知られている。

§3. <u>Translation plane</u>

$\Pi=\Pi(\mathfrak{P},\mathfrak{L},I)$ を射影平面とし，$G=Aut(\Pi)$ とおく。点 P と直線 l に対して $G(l,l)$，$G(P,P)$ を次で定義する．

$$G(l,l)=\bigcup_{Q\in l} G(Q,l) \qquad G(P,P)=\bigcup_{m\in[P]} G(P,m)$$

これらはいずれも G の部分群となることが知られている。

<u>定義</u>　直線 l が Π の <u>translation line</u> であるとは，$G(l,l)$ が $\mathfrak{P}-[l]$ 上可移に作用することをいう。同様に，点 P が Π の <u>translation point</u> であるとは，$G(P,P)$ が $\mathfrak{L}-[P]$

上可移に作用することをいう.

<u>定義</u>　translation line $(=\ell)$ をもつ射影平面を <u>translation plane</u> という。（このとき order を n とすれば. $G(\ell,\ell)\simeq E_{n^2}$, $G(p',\ell)\simeq E_n$ $\forall p'\in\ell$ が成り立ち. n はある素数の巾となることが知られている.）

§4. <u>Semi-field と Semi-field plane</u>

<u>定義</u>　二種の演算 $+,\cdot$ をもつ有限集合Dが <u>semi-field</u> であるとは. 次の(i)(ii)(iii) が満たされることをいう。

(i) Dは＋に関してアーベル群である。

(ii) $D-\{0\}$ は. ・に関して loop である。

(iii) D は分配律を満たす.

<u>注意1</u>.　[4] では semi-field のことを division ring と呼んでいるが. ここでは [2] に従って semi-field と呼ぶ。

<u>注意2</u>.　一般の semi-field は. 右分配律をみたす quasi-field（[4]の p158 参照）として定義されるが. 有限集合であるときは上の定義と同値になる。

<u>定義</u>　有限射影平面 $\Pi=(\mathfrak{P},\mathfrak{L},I)$ が <u>semi-field plane</u> であるとは. 四角形 $\mathfrak{O}=\{O,I,X,Y\}$ $(\subseteq\mathfrak{P})$ が存在して. $\mathfrak{O}$ により定まるPTRが semi-field になることをいう。

このとき. XY $(=[\infty])$ は translation line となり. Y $(=(\infty))$

は translation point となることが知られている。逆に，有限射影平面Πが直線lを translation line，点Pを translation point としてもつならば，(i) Πは$PG(2,8)$と同型であるか又は(ii) $P\,I\,l$でかつ四角形$\mathfrak{O}=\{O,I,X,Y\}$を次のように定めれば，それにより定まる PTR は semi-field となる：$O\notin l$

$X\in l-\{P\}$，$Y=P$，$I\notin[OX]\cup[OY]\cup[X,Y]$

上で，(i)の場合は§2の終りにのべたように，対応する PTR は体となり従って明らかにそれは semi-field でもあるので，次の定理が成りたつことが分かる。

定理（[4]の Theorem 6.9 参照）　射影平面Πが semi-field plane であるための必要十分条件は，Πが translation line と translation point をもつことである。

semi-field D から構成される semi-field plane

点の集合 $\mathfrak{P}=\{(x,y),(z)\mid x,y\in D,\ z\in D\cup\{\infty\}\}$

直線の集合 $\mathfrak{L}=\{[m,k],[l]\mid m,k\in D,\ l\in D\cup\{\infty\}\}$

Indicence relation：$(x,y)\,I\,[m,k]\iff mx+y=k$

$(x)\,I\,[m,k]\iff x=m,\qquad \forall x,y,m,k\in D$

$(x)\,I\,[\infty]$，$(\infty)\,I\,[k]\qquad \forall x,k\in D\cup\{\infty\}$

semi-field の定義よりこれが射影平面となることは容易に確かめられる。この射影平面を$\Pi(D)$と表わす。このとき，四角形$\mathfrak{O}=\{(0,0),(1,1),(0),(\infty)\}$に対応して定まる PTR

がDと同型になることも容易に確かめることができる。従って、semi-field Dにより構成される射影平面 $\Pi(D)$ は、semi-field plane となる。$\Pi(D)$ を semi-field Dにより定まる semi-field plane という。同型でない二つの semi-field により定まる二つの semi-field plane が同型になることもありうる。のちに§6でのべるように、Π_0を今までに知られている Desarguesian ではない semi-field plane とすると、$\Pi_0 \simeq \Pi(D)$ となる semi-field D は常に5種類以上あることが分かっている。

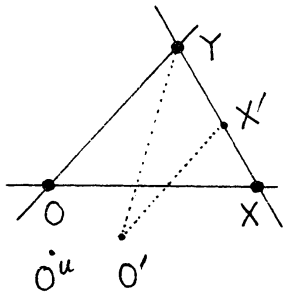
§5. Autotopism group

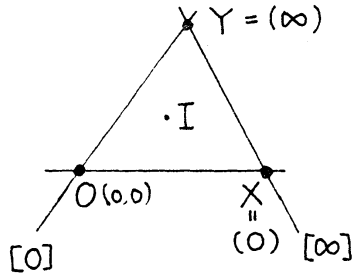
$\Pi = \Pi(\mathfrak{P}, \mathfrak{L}, I)$ を order n の semi-field plane とし、Π は non-Desarguesian ($\Pi \not\simeq PG(2,n)$) であると仮定する。§4でのべた定理により、Π は translation line と translation point をもつが、Π が有限射影平面で non-Desarguesian の時はこれらは unique に定まる。([4]の第6章参照) これをそれぞれ ℓ, Y ($Y \in \ell$) とおく。$X \in \ell - \{Y\}$, $O \notin \ell$ なる点 X, O をとり、$\{O, X, Y\}$ を一つ固定する。

定義　$G = (\mathrm{Aut}(\Pi))_{O,X,Y}$ を Π の autotopism group という。

$\{O, X, Y\}$ と同じ条件をみたすように $\{O', X', Y\}$ をとる

とし、$M = \mathrm{Aut}(\Pi)$ とおく。Y, l がそれぞれ unique な translation point と translation line であることより、$M_{(Y,Y)}$ の元 u がとれて $X^u = X'$, $Y^u = Y$. また $M_{(l,l)}$ の元 v がとれて $(O^u)^v = O'$ とできる。$uv = w$ とおけば、このとき $O^w = O'$, $X^w = X'$, $Y^w = Y$ となるので、$G\ (= M_{O,X,Y})$ と $M_{O',X',Y}$ は Π 上の置換群として同型になる。この意味で semi-field plane Π の autotopism group は、$\{O, X, Y\}$ が先にのべた条件をみたすように定められるかぎり、置換群として unique に定まることが分かる。





$\mathfrak{O} = \{O, I, X, Y\}$ が四角形となるように I を定める。$\mathfrak{O}$ により定まる semi-field を D とし、$\Pi = \Pi(D)$ とみる。(従って $Y = (\infty)$, $XY = [\infty]$, $OY = [0]$)

$M = \mathrm{Aut}(\Pi)$, $T_1 = M_{([\infty],[\infty])}$, $T_2 = M_{((\infty),[0])}$, $T = T_1T_2$ とおけば、次が成りたつ。

$T \triangleright T_1$, $T_1 \simeq E_{n^2}$, $T_2 \simeq E_n$　$T_1 \cap T_2 = 1$

$M = GT \triangleright T$, $G \cap T = 1$　(E_m は order m の基本可換群)

従って、$\mathrm{Aut}(\Pi)$ を決めるためには autotopism group G の構造を知ることが本質的である。G については、次のことが古くから予想されている。

<u>Conjecture</u>　autotopism group G は可解群である。

§6　<u>Kallaher-Liebler の予想</u>

記号はすべて §5 と同じとする。

$\Phi = \mathfrak{P} - [OX] \cup [OY] \cup [XY]$、すなわち $\{O, X, Y\}$ により定まる三直線上にない点の全体を Φ とするとき、autotopism group G は、Φ 上の faithful な置換群とみることができる。Φ が $\Phi = \Phi_1 \cup \Phi_2 \cup \cdots \cup \Phi_t$ のように t 個の G-orbit の和になっているとすると次が成りたつことが知られている。

<u>定理</u>　$I, I' \in \Phi$ が同じ G-orbit 上にあるならば、$\{O, I, X, Y\}$, $\{O, I', X, Y\}$ によりそれぞれ定まる semi-field D, D' は同型である。($D = D(I)$ のように表わすことにする)

各 orbit Φ_i の元 I_i をとり $D_i = D(I_i)$　$(1 \leqq i \leqq t)$ と定める。

<u>定理</u>　(i) $i \neq j$ ならば、$D_i \not\simeq D_j$

(ii) $\Pi \simeq \Pi(D_i)$　　$\forall i \in \{1, 2, \cdots, t\}$

(iii) ある semi-field D に対して $\Pi \simeq \Pi(D)$ であれば、D は $D_1, \cdots, D_t$ のどれかに同型である。

上の二つの定理により Π を座標化する semi-field の同型類と亜上の G-orbit が一対一に対応することが分かる。（詳細は [4] の Theorem 8.10）

Desarguesian $PG(2,q)$ の場合には $t=1$．つまり G が亜上可移になることが知られているが．逆に $t=1$ となるのはこれに限るであろうと予想されていた。（[4] の p177 参照）

[5] において Kallaher は．この予想が正しいことを証明した。

<u>定理</u>（M.J. Kallaher [5]）有限 semi-field plane Π が Desarguesian であるための必要十分条件は．$t=1$ が成りたつことである．

有限な semi-field plane で．$2 \leqq t \leqq 4$ となるものは全く知られていない．Kallaher と Liebler は [6] において次の予想をたてた。

<u>Conjecture</u> Π が有限な semi-field で かつ Desarguesian でなければ．$t \geqq 5$ が成りたつ

この Conjecture の根拠として．Kallaher-Liebler は次の定理を証明した。

<u>定理</u>（[6]）Π を有限な non-Desarguesian semi-field plane で．(i) Π の autotopism group が可解で (ii) Π の order が 2^6 でないならば．$t \geqq 5$ が成りたつ。

この定理において，仮定(ii)はのちにのべるように除くことができる。([3]) 仮定(i)は，§5ですでにのべたように，その正しさが予想されていることである。 従って，もしも Kallaher-Liebler の予想に対する反例（つまり $t=2,3$ 又は4の場合の例）がみつかるならば，それは「autotopism group の可解性の予想」を否定するものとなっていることがただちにいえる。

偶数の order をもつ semi-field plane の場合

以下では Π の order n が偶数の場合について考える。有限な semi-field plane の order は §3からも分かるように素数巾となっているから，今の場合 $n=2^r$ とおくことができる。先にのべたように，Kallaher-Liebler の定理の仮定(ii)は取り除くことができる。

定理([3]) Kallaher-Liebler の定理は $n=2^6$ の時にも成りたつ。

証明は[6]で用いられた方法と同様に autotopism group G が誘導する直線 $[\infty]$, $[0]$, $[0,0]$ 上の三種類の線型変換群を考えて，G の構造のだいたいの形を定めそれをもとに対応する semi-field が結局，体になることを示すやり方である。([4]の第8章§4及び§6参照)

次の補題は semi-field plane に限らず，order が偶数の射影

平面について成りたつ。

補題（[3]）射影平面Πの order n が偶数で，$\sqrt[4]{n} \notin \mathbb{N}$ ならば，偶数位数の collineation group M で，$F(M)$ が三角形（同一直線上にない3点）を含むものに対して次の(i)(ii) が成りたつ

(i) SをMの 2-Sylow 群とするとき，$F(S)=F(T)$ がすべての $T(\neq 1) \leq S$ について成りたち，かつ $F(S)$ は Baer subplane になっている。

(ii) M の 2-Sylow 群全体が生成する部分群をNとするとき，$F(N) \neq F(S)$ ならば，global stabilizer $M(F(S))$ は Mの strongly embedded subgroup である。（strongly embedded subgroup の定義とその性質については[1]参照）

semi-field plane Π の order が $n=2^r$ で $r \not\equiv 0 \pmod 4$ かつΦ上のG-orbit の数t が $2 \leqq t \leqq 4$ をみたすとする。Kallaher-Liebler の定理及び上にのべた $n=2^6$ の場合の結果より，autotopism group G は非可解となることが分かる。Feit-Thompson の定理よりGは偶数位数の群となる。上に示した補題より，Gの 2-Sylow 群Sは$\Pi - F(S)$上 semi-regular で，$F(S)$は order $\sqrt{n}$ の Baer subplane となり，$2 \leqq t \leqq 4$ より補題の(ii)においてGは strongly embedded subgroup をもつ群であることが示される。$\overline{\pi} = F(S)$, $\overline{\Phi} = \Phi \cap F(S)$ とし，$\overline{\Phi}$ 上の $N_G(S)$-orbit の数を $\overline{t}$ とおくと，$\overline{t} \leqq t \leqq 4$，かつ $\overline{\pi}$ は order $\sqrt{n} = 2^{r/2}$ の semi-field plane である。$r \not\equiv 0 \pmod 4$ であるから $\sqrt{n}$ は平方数でないから $\overline{\pi}$ の autotopism group は $N_G(S)^{\overline{\pi}}$ を含む奇数位数の群となり Feit-Thompson の定理よりこれは可解群である。再び Kallaher-Liebler の定理を用いて $\overline{\pi}$ は Desarguesian となり $N_G(S)^{\overline{\pi}}$ は既知の群となる。これを用いて autotopism group G の性質を知ることができて，次の定理を得る。

<u>定理</u>（[3]）Kallaher-Liebler の予想において，$n = 2^r$ ($r \not\equiv 0 \pmod 4$) とすると，次の(i)又は(ii)が成りたつ。

(i) $t \geqq 5$

(ii) $4 \geqq t \geqq 2$ で，$O(G) = N$，$G^{(\infty)} = M$ とおけば $q^2 = 2^r$，$N \leq \mathbb{Z}_{q-1}$，$M \simeq SL(2, q)$，$G/MN \leq \mathbb{Z}_{r/2}$ が成りたち，かつ N は Φ 上 semi-regular，$l = [\infty], [0]$ 又は $[0,0]$ に対して M は $l - \{(\infty), (0), (0,0)\}$ 上可移に作用する。

参 考 文 献

[1] H. Bender : Transitive Gruppen gerader Ordnung, in denen jede Involution genau einen Punkt festlast, J. Algebra 17 (1971), 527–554.

[2] H. P. Dembowski : Finite Geometries, Berlin-Heidelberg-New York, Springer-Verlag, 1968.

[3] Y. Hiramine : On semi-field planes of even order, to appear.

[4] D. R. Hughes and F. C. Piper : Projective Planes, Berlin-Heidelberg-New York, Springer-Verlag, 1973.

[5] M. J. Kallaher : A conjecture on semi-field planes, Archiv der Math. 26 (1975), 436–440.

[6] M. J. Kallaher and R. A. Liebler : A conjecture on semi-field planes II, Geometriae Dedicata 8 (1979), 13–30.